234

Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Soit $(X;\mathcal{A};\mu)$ espace mesuré, $\mathcal{M}^+(\mathcal{A})=\{f:X\to\mathbb{R}_+ \mid f \text{ mesurable}\}$
$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

# I] Espaces de Lebesgue $L^p(\mu)$

## 1] Espace vectoriel $\mathcal{L}^1(\mu)$

Définition 1: On dit que $f:X\to\mathbb{R}_+$ mesurable est étagée si f prend un nombre fini de valeurs : $f=\sum_{\alpha\in f(X)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$.
Dans ce cas, on appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ : $\int_X f\,d\mu := \sum_{\alpha\in f(X)} \alpha\,\mu(\{f=\alpha\}) \in \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$.
On note $\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions étagées positives.
Si $f\in\mathcal{M}^+(\mathcal{A})$, alors on pose: $\int_X f\,d\mu := \sup\{\int_X \varphi\,d\mu \mid \varphi\in\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}(\mathcal{A}),\ \varphi\le f\}$
On dit que f est μ-intégrable si $\int_X f\,d\mu<+\infty$.

Théorème 2: (de convergence monotone) Soit $(f_n)\in\mathcal{M}^+(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$ suite croissante ie $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n\le f_{n+1}$.
Alors: $f:=\lim_{+\infty} f_n \in \mathcal{M}^+(\mathcal{A})$ et $\int_X f\,d\mu = \lim_{+\infty}\int_X f_n\,d\mu$

Lemme 3: (de Fatou) Soit $(f_n)\in\mathcal{M}^+(\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$.
Alors: $0\le\int_X \liminf_{+\infty} f_n\,d\mu \le \liminf_{+\infty}\int_X f_n\,d\mu\le+\infty$

Définition 4: Une fonction $f:X\to\mathbb{K}$ est μ-intégrable si $|f|$ est μ-intégrable.
On note $\mathcal{L}^1(\mu)=\{f:X\to\mathbb{K}\mid f \text{ mesurable et } \int_X|f|\,d\mu<+\infty\}$

Remarque 5: $\|f\|_1:=\int_X|f|\,d\mu$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Proposition 6: $\forall f\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $|\int_X f\,d\mu|\le\int_X|f|\,d\mu$ avec égalité ssi $\exists \alpha\in\mathbb{U}$ | $f=\alpha|f|$ μ-presque partout

Théorème 7: (de convergence dominée) Soit $(f_n)\in\mathcal{L}^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n$ converge vers f μ-p.p. et il existe $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\le g$ μ-p.p.
Alors: $f\in\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_{+\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu$

Application 8: (théorème de continuité sous le signe intégrale)
Soit $f:E\times X\to\mathbb{K}$ telle que:
(i) $\forall u\in E$, $x\mapsto f(u;x)$ est mesurable sur X
(ii) pour presque tout $x\in X$, $u\mapsto f(u;x)$ est continue sur E
(iii) il existe $g\in\mathcal{L}^1(\mu)$ telle que: $\forall u\in E$, $|f(u;x)|\le g(x)$ μ-p.p.
Alors: $F(u):=\int_X f(u;x)\,d\mu(x)$ est continue sur E

## 2] Espace vectoriel $\mathcal{L}^p(\mu)$

Définition 9: Soit $p\in\mathbb{R}_+^*$. On définit l'ensemble $\mathcal{L}^p(\mu)$:
$\mathcal{L}^p(\mu):=\{f:X\to\mathbb{K}\mid f \text{ mesurable},\ \int_X|f|^p\,d\mu<+\infty\}$

Exemple 10: Pour $(X;\mathcal{A};\mu)=(\mathbb{N};\mathcal{P}(\mathbb{N});m)$ avec m la mesure de comptage, $\mathcal{L}^p(m)=\ell^p(\mathbb{N}):=\{(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\mid\sum|u_n|^p<+\infty\}$

Proposition 11: $\forall p\in\mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Proposition 12: Si $\mu(X)<+\infty$, alors $0<p\le q \Rightarrow \mathcal{L}^q(\mu)\subset\mathcal{L}^p(\mu)$

Application 13: Si $0<p\le q$, alors la convergence $L^q$ de variables aléatoires implique leur convergence $L^p$.

Notation 14: On note $\|f\|_p:=\left(\int_X|f|^p\,d\mu\right)^{\frac1p}$

Lemme 15: (inégalité de Young) Soit $\alpha\in]0;1[$, $u,v\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$.
Alors: $u^\alpha v^{1-\alpha}\le\alpha u+(1-\alpha)v$ avec égalité ssi $u=v$.

Théorème 16: (de Hölder) Soit $f,g:X\to\mathbb{K}$ mesurables, $p,q\in[1;+\infty[$ telles que $\frac1p+\frac1q=1$ et $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$ et $g\in\mathcal{L}^q(\mu)$.
Alors: $fg\in\mathcal{L}^1(\mu)$ et $\|fg\|_1\le\|f\|_p\|g\|_q$

Corollaire 17: (inégalité de Minkowski) Soit $p\in[1;+\infty[$, $f,g\in\mathcal{L}^p(\mu)$
Alors: $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$ avec égalité ssi $\begin{cases} f=0 \ \mu\text{-p.p. ou } g=\alpha f\\ f\bar{g}\ge0\ \mu\text{-p.p.}\end{cases}$

Remarque 18: $\|\cdot\|_p$ n'est pas une normes sur $\mathcal{L}^p(\mu)$.

### 3) Espace vectoriel quotient normé $L^P(\mu)$

IX.3

**Définition 19**: On définit pour $p \in [1;+\infty[$, l'ensemble quotient:
$L^P(\mu) := \mathcal{L}^P(\mu)/\sim$ pour $f \sim g$ ssi $\|f-g\|_p = 0$

**Proposition 20**: $\forall p \in [1;+\infty[$, $(L^P(\mu); \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé.

[Bri]

**Lemme 21**: Soit $(E; \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
Alors: $E$ est un espace de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.

**Théorème 22**: (de Riesz-Fischer) $\forall p \in [1;+\infty[$, $(L^P(\mu); \|\cdot\|_p)$ est complet

**Corollaire 23**: Soit $(f_n) \in \mathcal{L}^P(\mu)^{\mathbb{N}}$, $f \in \mathcal{L}^P(\mu)$ telle que $f_n \to f$
Alors: il existe $(f_{\varphi(n)})$ sous-suite extraite et $g \in \mathcal{L}^P(\mu)$ telle que:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_{\varphi(n)}| \leq g$ $\mu$-p.p. et $f_{\varphi(n)} \xrightarrow[+\infty]{} f$ $\mu$-p.p.

## II) Densité dans les espaces $L^P(\mu)$

### 1) Densité avec les fonctions continues

V.3

**Lemme 24**: (fondamental d'approximation) Soit $f$ mesurable.
Alors: il existe $(f_n)$ suite de fonctions étagées telles que:
$\forall x \in X$, $\lim f_n(x) = f(x)$ et on a:
(1) Si de plus $f \geq 0$, alors $(f_n)$ est croissante et positive
(2) Si $f$ est bornée, alors: $\lim\limits_{+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

IX.4

**Proposition 25**: $\forall p \in [1;+\infty[$, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans $L^P(\mu)$

**Lemme 26**: Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{L}^P(\mu)$ tel que $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{L}^P(\mu)$.
Alors: $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{L}^P(\mu)$.

[Bri]

**Théorème 27**: (1) L'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans tous les $L^P(\lambda)$ pour $p \in [1;+\infty[$
(2) L'ensemble $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans tous les $L^P(\lambda)$ pour $p \in [1;+\infty[$.

IX.5 [Bri]

**Théorème 28**: L'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$.

### 2) Convolution dans $(\mathbb{R}^d; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d); \lambda_d)$

XIV.2

**Définition 29**: Soit $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ boréliennes. La convolée de $f$ et $g$ est telle que: $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,d\lambda_d(y)$

**Proposition 30**: (1) $f*g$ est bien définie, borélienne positive et telle que: $\int_{\mathbb{R}^d} f*g\,d\lambda_d = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\lambda_d\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g\,d\lambda_d\right)$
(2) La convolution est commutative: $f*g = g*f$ et associative:
$f*(g*h) = (f*g)*h$.

[Bri]

**Contrexemple 31**: La convolution n'est pas associative en général.
Pour $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$; $g = \mathbb{1}_{[-1;0]} - \mathbb{1}_{[0;1]}$ et $h = \mathbb{1}$, on a:
$0 = f*(g*h) \neq (f*g)*h = 1$

XIV.3

**Théorème 32**: Soit $f \in \mathcal{L}^P(\lambda_d)$; $g \in \mathcal{L}^q(\lambda_d)$, $p,q \in [1;+\infty]$ tq: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.
Alors: (1) $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}^d$, $f*g$ est uniformément continue bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$ et $(f,g) \mapsto f*g$ est bilinéaire.
(2) Si $p,q \in ]1;+\infty[$, alors $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f*g(x) = 0$

**Théorème 33**: (1) Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda_d)$. Alors $f*g$ est définie pour $\lambda_d$-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f*g \in L^1(\lambda_d)$ et: $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$
et $\int_{\mathbb{R}^d} f*g\,d\lambda_d = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\,d\lambda_d\right) \times \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\,d\lambda_d\right)$
(2) $(L^1(\lambda_d); +; \cdot)$ muni de $*$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative, ne possédant pas d'unité.

### 3) Densité avec les fonctions $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$

XIV.4 [Bri]

**Définition 34**: On dit que $(\alpha_n) \in L^1(\lambda_d)^{\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité si: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n\,d\lambda_d = 1$; $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |\alpha_n|\,d\lambda_d < +\infty$
et $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} |\alpha_n|\,d\lambda_d = 0$

**Exemple 35**: Pour $\alpha \in L^1(\lambda_d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha\,d\lambda_d = 1$, $(\alpha_n : x \mapsto n^d \alpha(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

XIV.4 [Bri]

**Théorème 36 :** Soit $(\alpha_n) \in L^1(\lambda_n)^{\mathbb{N}}$ approximation de l'unité, soit $p \in [1;+\infty[$, $f \in L^p(\lambda_d)$.
**Alors :** $\forall n \in \mathbb{N}$, $f * \alpha_n \in L^p(\lambda_d)$ et $f*\alpha_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$

**Théorème 37 :** Si $f \in L^\infty(\lambda_d)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$
**Alors :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f*\alpha_n - f\|_\infty = 0$

XIV.5

**Définition 38 :** On dit que $(\alpha_n) \in L^1(\lambda_d)$ est une suite régularisante si $(\alpha_n)$ est une approximation de l'unité et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$

**Exemple 39 :** Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$, on pose $\alpha = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \, d\lambda_d}$ et $(\alpha_n : x \mapsto n^d \alpha(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

**Théorème 40 :** $\forall p \in [1;+\infty[$, $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\lambda_d)$.

## III) Étude du cas particulier $L^2$

### 1) Polynômes orthogonaux dans $L^2(I;\rho)$

III.1.5 [OA]

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle.

**Définition 41 :** On appelle fonction poids toute fonction : $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_I |x|^n \rho(x) dx < +\infty$. On note $L^2(I;\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité $\rho$ par rapport à la mesure de Lebesgue muni du produit scalaire $\langle f;g\rangle_\rho = \int_I f(x) g(x) \rho(x) dx$

**Proposition 42 :** $(L^2(I;\rho) ; \langle\cdot;\cdot\rangle_\rho)$ est un espace de Hilbert

**Théorème 43 :** Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux 2 à 2 tels que $\deg(P_n) = n$. On appelle cette famille les polynômes orthogonaux associés à $\rho$.

**Exemple 44 :** (1) Si $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, alors on appelle ces polynômes les polynômes de Hermite :
$P_0 = 1$ ; $P_1 = X$ ; $P_2 = X^2 - \frac{1}{2}$ ; … ; $P_n = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$
(2) Si $I = [-1;1]$ et $\rho(x) = 1$, on les appelle polynômes de Legendre :
$P_0 = 1$ ; $P_1 = X$ ; $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ ; … ; $P_n = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$

III.1.5 [OA]

**Théorème 45 :** Soit $\rho$ une fonction poids telle que $\exists a > 0 \mid \int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < +\infty$
**Alors :** la famille des polynômes orthogonaux associés à $\rho$ forme une base hilbertienne de $L^2(I;\rho)$

**Contrexemple 46 :** L'hypothèse sur $\rho$ est vitale.
Pour $I = \mathbb{R}_+$, $w(x) = x^{-\ln(x)}$, la famille des polynômes orthogonaux associés à $w$ ne forme pas une base hilbertienne

### 2) Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

X.5 [Li]

**Définition 47 :** On appelle espace de Schwarz l'espace :
$S(\mathbb{R}) := \{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid \forall n,k \in \mathbb{N}, \sup_{\mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| < +\infty \}$

**Exemple 48 :** $\begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-ax^2} \end{matrix}$ pour $a > 0$ est dans $S(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R})$

**Remarque 49 :** $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$

**Théorème 50 :** L'application $\mathcal{F} : \begin{matrix} S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left[\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i x \xi} f(x) dx\right] \end{matrix}$ est surjective.

**Théorème 51 :** $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

[Ber]

**Proposition 52 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$ avec $E, F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
**Alors :** $f$ est continue ssi $f$ est uniformément continue

**Théorème 53 :** (de prolongement des applications uniformément continues) Soit $E, F$ deux espaces métriques, $F$ complet, $A \subseteq E$ dense et $f : A \to F$ uniformément continue.
**Alors :** $\exists! \tilde{f} : E \to F$ uniformément continue qui prolonge $f$

**Théorème 54 :** (de Plancherel) Soit $\mathcal{P} : \begin{matrix} S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) \end{matrix}$
**Alors :** $\mathcal{P}$ est bien définie, et il existe un unique prolongement isomorphique, isométrique de $\mathcal{P}$ à $L^2(\mathbb{R})$.

Références :

[Bri] Analyse Théorie de l'intégration — Briane

[OA] Objectif Agrégation — Beck

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle — Li

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques — Isenmann